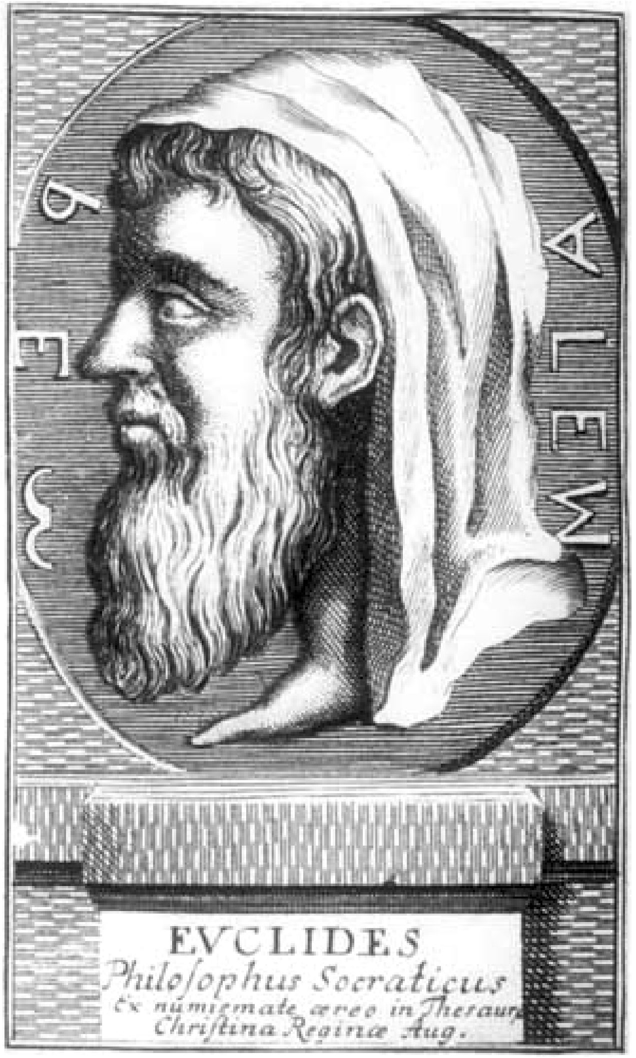
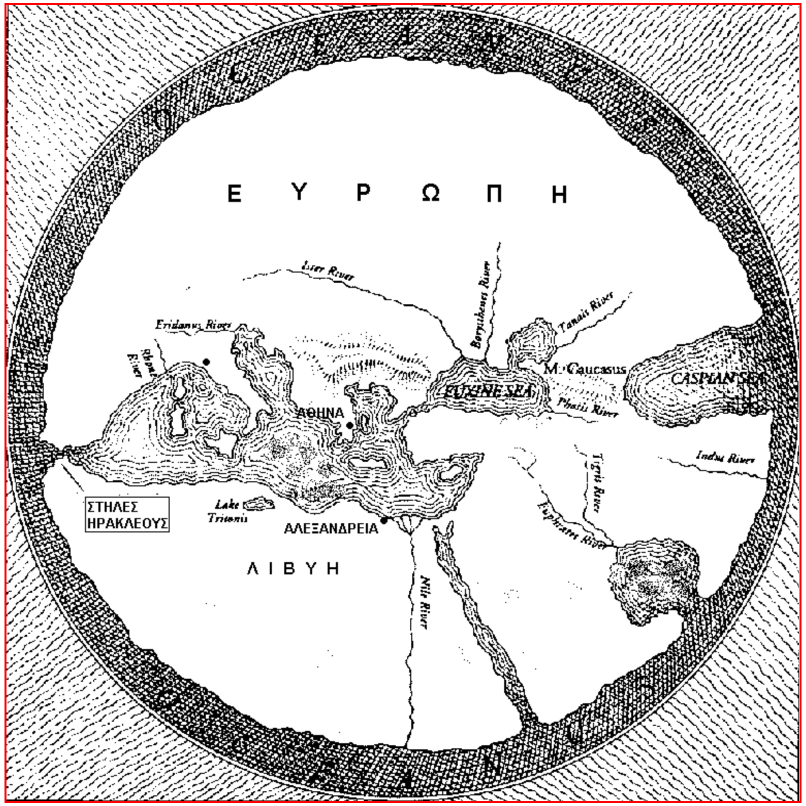
Ηλίας Σκαρδανάς
Μαθηματικός

Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ
Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΟΥ ΦΕΙΔΙΑ [Φ]
ΚΑΙ Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI





Πρόλογος.

Το τεύχος που κρατάτε στα χέρια σας γράφτηκε με σκοπό να σας κάνει γνωστό το πρόβλημα της **χρυσής τομής** του **αριθμού του Φειδία** και τη σχέση τους με την **ακολουθία του Fibonacci.**

Ακόμα επιχειρεί να δείξει, περιπτώσεις που εμφανίζονται τα πιο πάνω στη φύση ή στην τέχνη. Τα παραδείγματα που αναφέρονται είναι κλασσικά και γνωστά στους μαθηματικούς. Τα παραθέτω με σκοπό να προκαλέσουν το ενδιαφέρον σας και ίσως γίνουν η αφορμή για δικές σας αναζητήσεις αναλόγων παραδειγμάτων.

Ωστόσο πρέπει να γίνει σαφές ότι η χρυσή τομή **δεν αποτελεί φυσικό νόμο αλλά είναι μια τάση της φύσης να την προσεγγίζει**.

Η παρουσίαση των θεμάτων γίνεται με σχήματα, εικόνες και πίνακες, με αρκετά σύντομο τρόπο, ελπίζω κατανοητό και όχι κουραστικό.

Ο Ευκλείδης υπήρξε και εξακολουθεί να θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους και πιο διάσημους Έλληνες Μαθηματικούς. Υπολογίζεται ότι γεννήθηκε περίπου το 360 π.Χ.

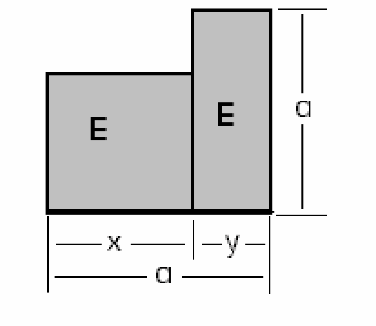
Είναι πάντως βέβαιο ότι, λίγα χρόνια μετά τον θάνατο του Πλάτωνος (347 π.Χ.), η φήμη του Ευκλείδη είχε απλωθεί από την Αθήνα σε όλο τον τότε γνωστό κόσμο (βλ. χάρτη στη σελ. 2).

Ο Πτολεμαίος ο Α!, ο πρώτος (μετά τον Μ. Αλέξανδρο) Έλληνας ηγεμόνας της Αιγύπτου (323-285 π.Χ.) κάλεσε τον Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια για να αναλάβει την διεύθυνση του εκεί νέου Πανεπιστημίου. Με δεδομένο ότι ο Πτολεμαίος αναζητούσε στην Αθήνα την εποχή εκείνη τους διαπρεπέστερους του ελληνικού πνευματικού κόσμου, βγαίνει το συμπέρασμα ότι ο Ευκλείδης ήταν ο μεγαλύτερος Έλληνας μαθηματικός της εποχής.

Η μεγάλη φήμη που απέκτησε ο Ευκλείδης οφείλεται στο σύγγραμμά του με τίτλο «Στοιχεία». Οι μεταγενέστεροι συγγραφείς όταν αναφέρονται στον Ευκλείδη δεν τον αποκαλούν με το όνομά του αλλά με τον όρο «Στοιχειωτής». Η όρος «Στοιχεία» σημαίνει εδώ τα στοιχεία των Μαθηματικών δηλαδή τα στοιχεία της Γεωμετρίας και τα στοιχεία της Θεωρίας των Αριθμών. Όσο υπάρχουν άνθρωποι επί της γης τα «Στοιχεία» θα χρησιμοποιούνται κατ' ανάγκη για την θεμελίωση όχι μόνο των Μαθηματικών αλλά και κάθε άλλης τεχνολογικής επιστήμης. Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από 13 βιβλία. Τα πρώτα 10 αφορούν την Γεωμετρία και τα υπόλοιπα 3 την Θεωρία των Αριθμών. Το έργο αυτό θεωρείται το πληρέστερο πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπινου πνεύματος στους τομείς της παιδαγωγικής και της μεθοδολογίας. Για το λόγο αυτό έχει μεταφραστεί σε όλες τις γλώσσες. Πολλά από τα συγγράμματα που κυκλοφορούν στις μέρες μας με τον τίτλο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» είναι απλές ελεύθερες μεταφράσεις των 10 πρώτων βιβλίων των «Στοιχείων».

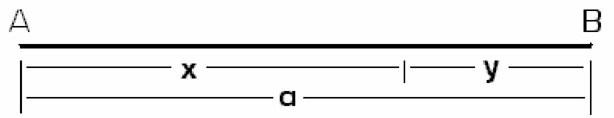
Η Χρυσή τομή και ο αριθμός του Φειδία

Το πρόβλημα της «χρυσής τομής», γνωστό στους **Πυθαγόρειους** είχε από τότε συσχετιστεί με την αισθητική στα καλλιτεχνικά έργα. Ο **Ευκλείδης** είχε διατυπώσει το πρόβλημα αυτό ως εξής:



«**Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα α σε δυο τμήματα, x και y με τέτοιο τρόπο ώστε, αν το x είναι μεγαλύτερο από το y, το τετράγωνο που σχηματίζεται με πλευρά το x έχει εμβαδόν ίσο με το ορθογώνιο που σχηματίζεται με πλευρές α και y**».

Μια άλλη διατύπωση του προβλήματος είναι η εξής:



«**Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα α σε μέσο και άκρο λόγο δηλαδή σε δυο τμήματα x και y με τέτοιο τρόπο ώστε αν x είναι το μεγαλύτερο και y το μικρότερο, ο λόγος του τμήματος α προς το x είναι ίσος με το λόγο του x προς το y**.»

Προφανώς θα ισχύουν: $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\Phi$.

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\alpha-x} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha-x}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha}{x}-1 \Leftrightarrow$$

$$\Phi^{-1}=\Phi-1 \text{ ή } \boxed{\Phi^2-\Phi-1=0.}$$

$\Delta=(\bullet 1)^2\bullet 4\cdot 1\cdot(\bullet 1)=1+4=5$ άρα $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Η ρίζα $\Phi'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ απορρίπτεται επειδή είναι αρνητική (ωστόσο θα χρησιμοποιηθεί πιο κάτω). Ο αριθμός Φ είναι γνωστός σαν «**χρυσός λόγος**» ή «**αριθμός του Φειδία**» επειδή ο διάσημος αυτός γλύπτης της αρχαιότητας σεβάστηκε αυτή την αναλογία και την χρησιμοποίησε στα έργα του. Από το όνομα του Φειδία προέρχεται ο διεθνής συμβολισμός του «**Φ**» (phi) και είναι Φ=1,618033989... ενώ x=0,618034·α.

Ο αριθμός φ εμφανίζεται σε πολλές αρχιτεκτονικές κατασκευές, στη φύση, στα μαθηματικά και αλλού. Π.χ.

Στο Αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου το κάτω διάζωμα έχει 34 κερκίδες ενώ το άνω 21.

Παρατηρήστε ότι: $\frac{34}{21}\cong\frac{34+21}{34}\cong 1{,}618$

Ο **Fibonacci** ήταν ένας από τους μεγαλύτερους Ευρωπαίους μαθηματικούς του μεσαίωνα. Γεννήθηκε στην Πίζα, ένα από τα μεγαλύτερα εμπορικά λιμάνια της Ιταλίας, γύρω στα 1175 μ.Χ. Το πλήρες όνομά του ήταν **Leonardo Bigollo,** ή **Leonardo Pisano** (Λεονάρδος της Πίζας). Το **Fibonacci** είναι μάλλον σύντμηση των fillio di Bonacci (Ο γιος της οικογένειας Bonacci). Ο πατέρας του **Guglielmo Bonaccio** ήταν ένα είδος αξιωματικού-τελώνη στη Β. Αφρική. Έτσι ο Leonardo μεγάλωσε και σπούδασε εκεί, ενώ αργότερα ταξίδεψε σε διάφορα λιμάνια της Μεσογείου. Όπως ήταν φυσικό γνώρισε και συναναστράφηκε με πολλούς εμπόρους και έμαθε τα διάφορα συστήματα με τα οποία αυτοί έκαναν αριθμητική. Σύντομα συνειδητοποίησε τα πολλά πλεονεκτήματα του ινδο-αραβικού συστήματος έναντι όλων των υπολοίπων (Ας μην ξεχνάμε ότι η Ιταλία, η Ευρώπη και το Βυζάντιο χρησιμοποιούσαν το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης).

Ήταν ένας από τους πρώτους που εισήγαγαν στην Ευρώπη το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα. Με το βιβλίο του **Liber abbaci (Βιβλίο του άβακα ή Βιβλίο των υπολογισμών)** έπεισε πολλούς Ευρωπαίους Μαθηματικούς να χρησιμοποιούν το «νέο» σύστημα.

Πέθανε το 1240 και σήμερα υπάρχει ένα μνημείο του κοντά στον κεκλιμένο πύργο, δίπλα στο καθεδρικό ναό της Πίζα.

Ο Fibonacci έγραψε 5 Μαθηματικές εργασίες, 4 βιβλία και 1 επιστολή:

Liber Abbaci,. Σ' αυτό αναφέρεται το πρόβλημα των κουνελιών και της ακολουθίας που είναι γνωστή με το όνομά του (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…).

Practica geometriae (1220), **Flos** (1225), **Liber quadratorum** (1225), **A letter to Master Theodorus**, (1225).

Η Ακολουθία του Fibonacci.

Η ακολουθία του Fibonacci δίνεται από τον αναδρομικό τύπο:

$$\boxed{\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2} \text{ με } \alpha_1=1 \text{ και } \alpha_2=1 .}$$

Είναι ακόμα δυνατόν να οριστούν οι αριθμοί Fibonacci με τη βοήθεια του τύπου

$$\boxed{\alpha_\nu=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu}{\sqrt{5}}}$$

Έτσι οι αριθμοί Fibonacci είναι οι 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Πιο κάτω θα δούμε συσχετισμούς των αριθμών της ακολουθίας αυτής με διάφορα ζητήματα των μαθηματικών, της αρχιτεκτονικής και της φύσης.

Η σχέση μεταξύ του αριθμού Φ και των αριθμών Fibonacci είναι προφανής. Από τον δεύτερο ορισμό της ακολουθίας προκύπτει $\alpha_\nu = \dfrac{\Phi^\nu - \Phi'^\nu}{\sqrt{5}}$ ακόμα μπορείτε να παρατηρήσετε στον πιο κάτω πίνακα η ακολουθία των λόγων $\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}$ (φαίνεται στην τελευταία στήλη) τείνει προς τον αριθμό φ=1,618033989... .

ν	α(ν)	α(ν)/α(ν-1)
1	1	
2	1	1,00000000
3	2	2,00000000
4	3	1,50000000
5	5	1,66666667
6	8	1,60000000
7	13	1,62500000
8	21	1,61538462
9	34	1,61904762
10	55	1,61764706
11	89	1,61818182
12	144	1,61797753
13	233	1,61805556
14	377	1,61802575
15	610	1,61803714
16	987	1,61803279
17	1597	1,61803445
18	2584	1,61803381
19	4181	1,61803406
20	6765	1,61803396

Παρατηρήστε τον επόμενο πίνακα. Αν θεωρήσουμε 3 διαδοχικούς όρους της ακολουθίας **Fibonacci** $\alpha_{\nu-1}$, α_ν, $\alpha_{\nu+1}$ τότε ισχύει $|\boldsymbol{\alpha_\nu^2 - \alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_{\nu+1}}| = \mathbf{1}$.

α(ν-1)	α(ν)	α(ν+1)	[α(ν)]^2	α(ν-1)*α(ν+1)	Διαφορά
		1			
	1	1			
1	1	2	1	2	1
1	2	3	4	3	1
2	3	5	9	10	1
3	5	8	25	24	1
5	8	13	64	65	1
8	13	21	169	168	1
13	21	34	441	442	1
21	34	55	1156	1155	1
34	55	89	3025	3026	1
55	89	144	7921	7920	1
89	144	233	20736	20737	1
144	233	377	54289	54288	1
233	377	610	142129	142130	1
377	610	987	372100	372099	1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΗ ΦΥΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ FIBONACCI

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL

Είναι γνωστός ο διωνυμικός τύπος του Νεύτωνα.

$(\alpha+\beta)^\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \cdot \alpha^{\nu-\kappa}\beta^\kappa$ όπου ο συντελεστής $\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!\cdot(\nu-\kappa)!}$ με ν!=1·2·3·…·ν.

π.χ.

ν=2 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

ν=3 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

ν=4 $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$

ν=5 $(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2 +10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$

κ.ο.κ.

Το τρίγωνο του Pascal είναι μια τριγωνική διάταξη αριθμών με τη βοήθεια της οποίας βρίσκουμε πρακτικά τους πιο πάνω συντελεστές.

```
ν
0  ---------------------------------------------------------------> 1
1  -----------------------------------------------------------> 1     1
2  -------------------------------------------------------> 1     2     1
3  ---------------------------------------------------> 1     3     3     1
4  -----------------------------------------------> 1     4     6     4     1
5  -------------------------------------------> 1     5    10    10     5     1
6  ---------------------------------------> 1     6    15    20    15     6     1
7  -----------------------------------> 1     7    21    35    35    21     7     1
8  -------------------------------> 1     8    28    56    70    56    28     8     1
9  ---------------------------> 1     9    36    84   126   126    84    36     9     1
10  1    10    45   120   210   252   210   120    45    10     1
```

Κάθε γραμμή αρχίζει και τελειώνει με 1 ενώ καθένας από τους υπόλοιπους αριθμούς υπολογίζεται αν προσθέσουμε τους αριθμούς της προηγούμενης γραμμής, ανάμεσα στους οποίους βρίσκεται.

Στο Τρίγωνο του Pascal αν προσθέσουμε όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα βρίσκουμε τους αριθμούς του Fibonacci.

	1										
1	1	1									
1	1	2	1								
2	1	3	3	1							
3	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
8	1	6	15	20	15	6	1				
13	1	7	21	35	35	21	7	1			
21	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
34	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
55	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
89											

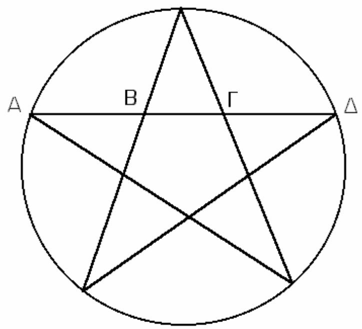
ΔΕΚΑΓΩΝΟ ΚΑΙ Φ.

Η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου που εγγράφεται σε κύκλο με ακτίνα R είναι $\alpha_{10} = \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$. Παρατηρείστε ότι ισχύουν: $\frac{\alpha_{10}}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\Phi' = \frac{5-1}{2\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\Phi}$ Άρα ο λόγος της ακτίνας του κύκλου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού δεκαγώνου είναι Φ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ.

Ισχύει η σχέση: $-\Phi' = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \dots$ κ.λ.π. η οποία μπορεί να συνδυαστεί με κάθε εμφάνιση του αριθμού Φ.

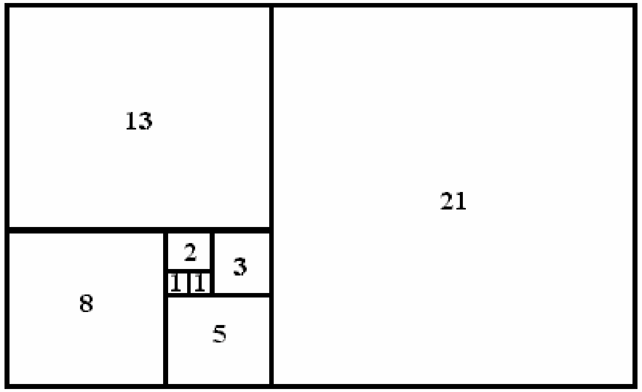
ΠΕΝΤΑΛΦΑ ΚΑΙ Φ.



Στο σχήμα της πεντάλφας που φαίνεται δίπλα το Β διαιρεί το ΑΓ και το Γ διαιρεί το ΑΔ σε μέσο και άκρο λόγο δηλαδή $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AB}{B\Gamma} = \varphi$. Σημειώστε ότι η πεντάλφα ήταν μυστικό σύμβολο των πυθαγορείων.

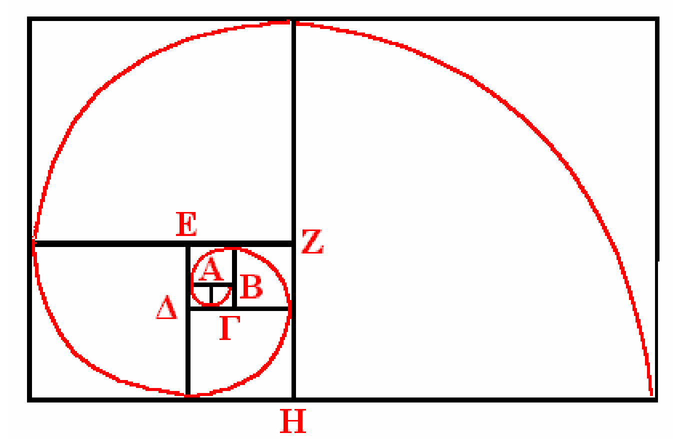
ΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΚΑΙ ΟΙ ΣΠΕΙΡΕΣ FIBONACCI

Μπορούμε να έχουμε και άλλη εικόνα που δείχνει τους αριθμούς Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,… εάν κατασκευάσουμε εφαπτόμενα τετράγωνα ξεκινώντας από δύο με πλευρά 1, συνεχίζοντας με ένα που έχει πλευρά 1+1=2, μετά ένα με πλευρά 2+1=3, δηλαδή με πλευρά το άθροισμα των πλευρών των προηγούμενων δύο τετραγώνων, όπως φαίνονται στο σχήμα. (Μέσα σε κάθε τετράγωνο φαίνεται το μήκος της πλευράς του).

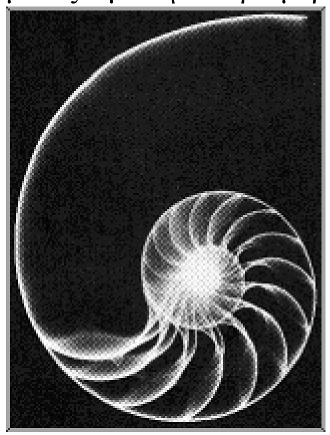


Τα τετράγωνα αυτά λέγονται τετράγωνα Fibonacci.

Αν τώρα κατασκευάσουμε τεταρτοκύκλιο στο εσωτερικό κάθε τετραγώνου με ακτίνα την πλευρά του δημιουργείται μια σπείρα η λεγόμενη σπείρα Fibonacci.



Η σπείρα αυτή μοιάζει με τη σπείρα μερικών οστρακοειδών



Ο λόγος των μηκών δυο διαδοχικών τμημάτων στις πιο πάνω σπείρες τείνει στον αριθμό Φ

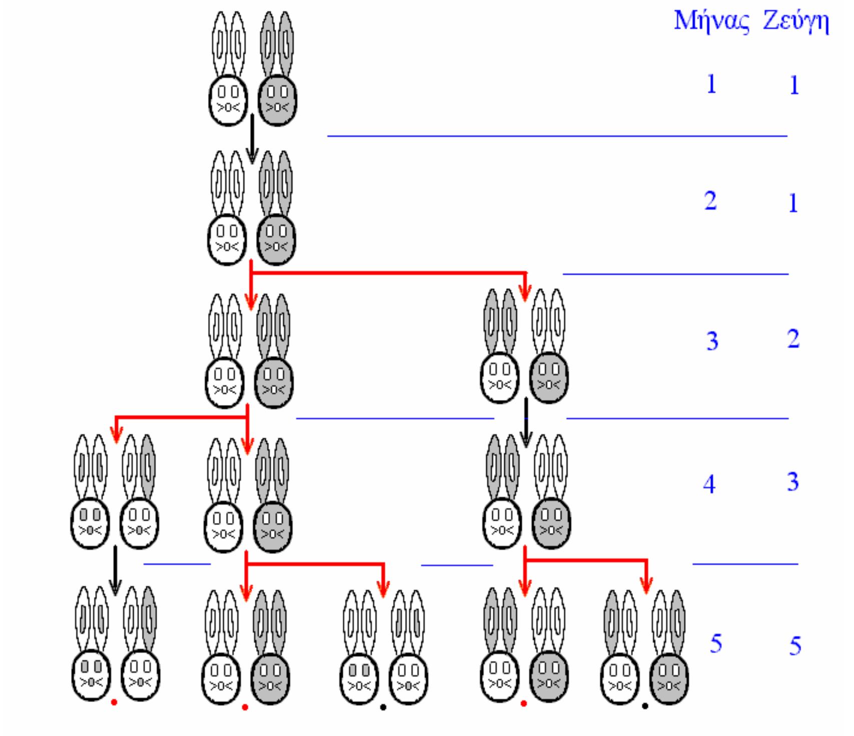
ΤΑ ΚΟΥΝΕΛΙΑ ΤΟΥ FIBONACCI

Το αυθεντικό πρόβλημα που διερεύνησε το 1202 ο Fibonacci ήταν σχετικό με το ρυθμό ανάπτυξης των κουνελιών, κάτω από ιδανικές συνθήκες.

Υποθέτουμε ότι αφήνουμε σε ένα αγρό ένα ζευγάρι νεογέννητα κουνέλια, ένα αρσενικό και ένα θηλυκό. Τα κουνέλια ενηλικιώνονται σε ένα μήνα. Στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό γεννάει ένα νέο ζευγάρι, ένα αρσενικό και ένα θηλυκό. Υποθέτουμε ακόμα ότι τα κουνέλια **δεν πεθαίνουν ποτέ** και ότι τα θηλυκά γεννούν στο **τέλος κάθε μήνα** μετά τον πρώτο και **πάντα ένα ζευγάρι αρσενικό – θηλυκό.** Το ερώτημα που έθεσε ο Fibonacci ήταν: Πόσα ζευγάρια κουνελιών θα υπάρχουν στον αγρό στο τέλος του χρόνου;

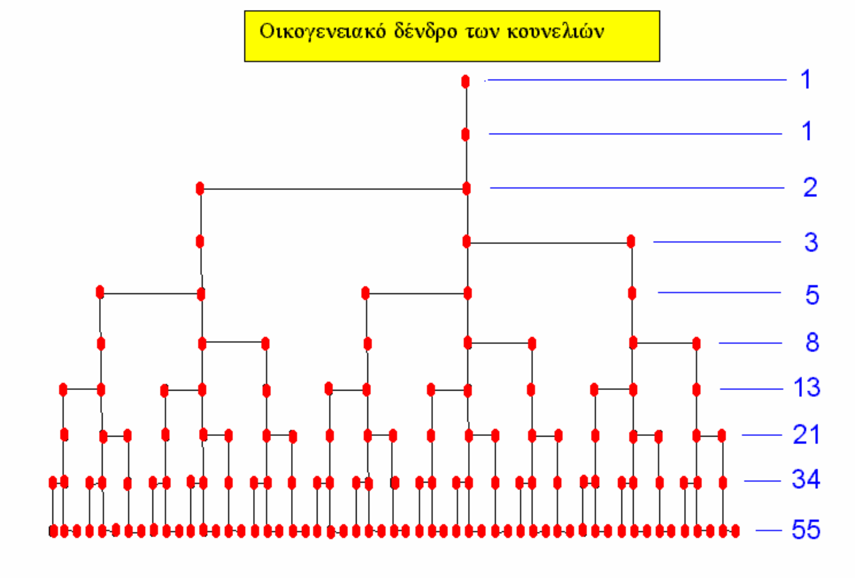
- Στο τέλος του πρώτου μήνα τα κουνέλια ζευγαρώνουν αλλά εξακολουθούν να είναι 1 ζευγάρι μόνο.
- Στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό γεννάει ένα ζευγάρι. Έτσι τα ζευγάρια γίνονται 2.
- Στο τέλος του τρίτου μήνα το δεύτερο ζευγάρι ενηλικιώνεται ενώ το πρώτο θηλυκό γεννάει πάλι. Έτσι τα ζευγάρια γίνονται 3.
- Στο τέλος του τέταρτου μήνα το πρώτο και το δεύτερο ζευγάρι γεννούν, ενώ το τρίτο ζευγάρι ενηλικιώνεται. Σύνολο ζευγαριών 5. κ.ο.κ.

Παρατηρήστε το επόμενο σχήμα:



Περιγράφει σχηματικά τα δεδομένα του προβλήματος.

Ακόμα μπορείτε να παρατηρήσετε το επόμενο διάγραμμα στο οποίο φαίνεται το γενεαλογικό δένδρο των κουνελιών του προβλήματος:



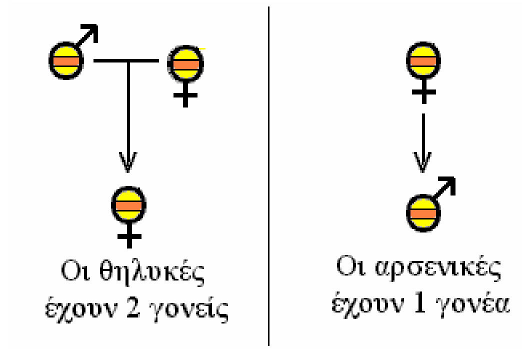
Ο λόγος των πληθυσμών δυο διαδοχικών χρονικών περιόδων όσο αυξάνει η «αποικία» των κουνελιών τείνει στον αριθμό Φ.

Οι μέλισσες και τα Οικογενειακά δένδρα τους.

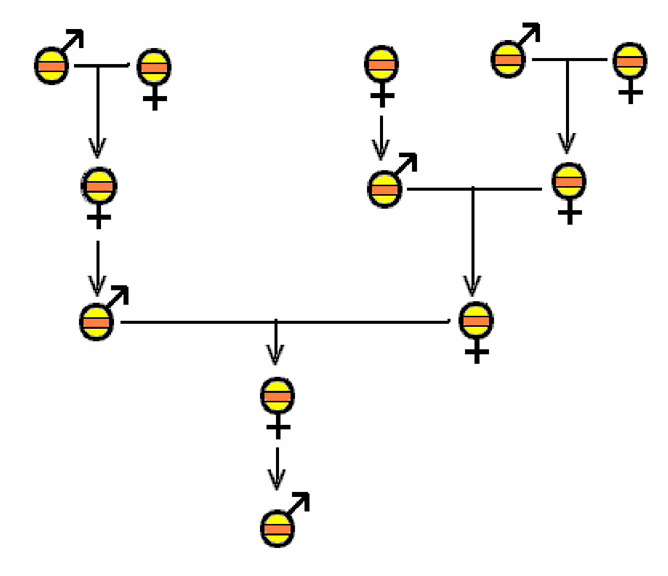
Υπάρχουν πάνω από 30000 είδη μέλισσες. Τα περισσότερα απ' αυτά τα είδη ζουν μοναχικά. Αντίθετα, το είδος που μας είναι πιο γνωστό ζει σε ομάδες τα λεγόμενα σμήνη και έχουν ένα ασυνήθιστο οικογενειακό δένδρο. Πολλές απ' αυτές μάλιστα δεν έχουν δυο γονείς.

Σε κάθε σμήνος υπάρχουν

- Μία θηλυκή μέλισσα που λέγεται **βασίλισσα** η οποία γεννάει αυγά.
- Πολλές θηλυκές μέλισσες που δεν γεννούν, τις **εργάτριες**. Οι εργάτριες προέρχονται από γονιμοποιημένα αυγά. Έτσι έχουν δυο γονείς.
- Μερικές αρσενικές μέλισσες που δεν εργάζονται τους **κηφήνες.** Οι κηφήνες προέρχονται από μη γονιμοποιημένα αυγά. Έτσι έχουν μόνο μητέρα και όχι πατέρα.



- Οι περισσότερες θηλυκές πεθαίνουν εργάτριες. Μερικές απ' αυτές όμως τρέφονται με **βασιλικό πολτό** και αναπτύσσονται σε βασίλισσες οι οποίες σχηματίζουν το δικό τους σμήνος και φεύγουν για την δική τους κυψέλη.



Στο προηγούμενο διάγραμμα φαίνεται το οικογενειακό δένδρο μιας αρσενικής μέλισσας.

※ Έχει 1 γονέα θηλυκό.
※ Έχει **2** παππούδες, αφού η μητέρα του έχει δυο γονείς.
※ Έχει **3** προ-παππούδες, αφού η γιαγιά του έχει δυο γονείς και ο παππούς του μόνο έναν.
※ Έχει **5** προ-προ-παππούδες.

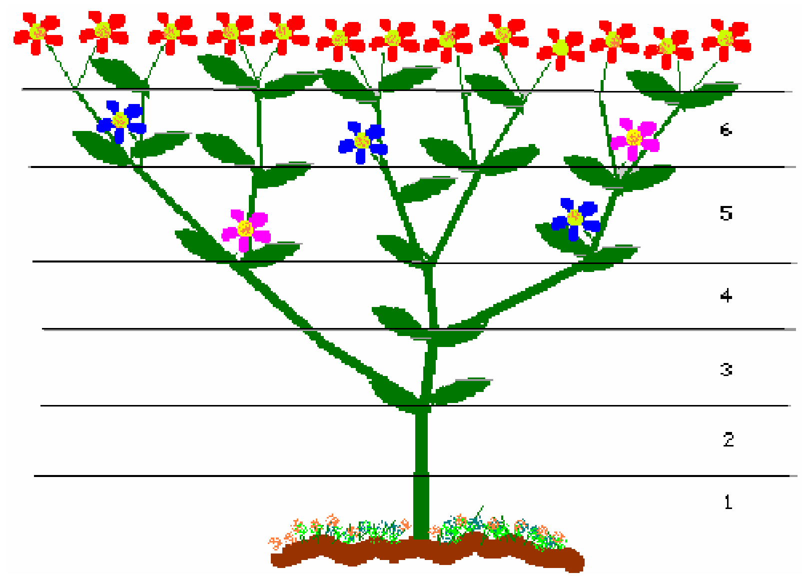
Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πλήθος των προγόνων μιας μέλισσας ανάλογα με το αν αυτή είναι αρσενική ή θηλυκή. Και πάλι όπως παρατηρείτε εμφανίζονται οι αριθμοί του Fibonacci.

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΓΟΝΕΩΝ	ΠΑΠΠΟΥΔΩΝ	ΠΡΟ ΠΑΠΠΟΥΔΩΝ	ΠΡΟ ΠΡΟ ΠΑΠΠΟΥΔΩΝ	ΠΡΟ ΠΡΟ ΠΡΟ ΠΑΠΠΟΥΔΩΝ	ΠΡΟ ΠΡΟ ΠΡΟ ΠΡΟ ΠΑΠΠΟΥΔΩΝ
ΑΡΣΕΝΙΚΗ	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**
ΘΗΛΥΚΗ	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**

Τα παρακλάδια των φυτών.

Στη βοτανική μπορούμε να παρατηρήσουμε την εμφάνιση των αριθμών Fibonacci στην ανάπτυξη των φυτών. Αν υποθέσουμε ότι κάθε παρακλάδι χρειάζεται ένα χρονικό διάστημα t για να αναπτυχθεί και στη συνέχεια κάθε t «πετάει» ένα νέο παρακλάδι, τότε ο αριθμός των κλαδιών που έχει πετάξει το φυτό μετά από ν χρονικά διαστήματα t θα είναι ο ν-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci. Ένα φυτό που η ανάπτυξή του μοιάζει πολύ με το προηγούμενο μοντέλο είναι το Achillea ptarmica.

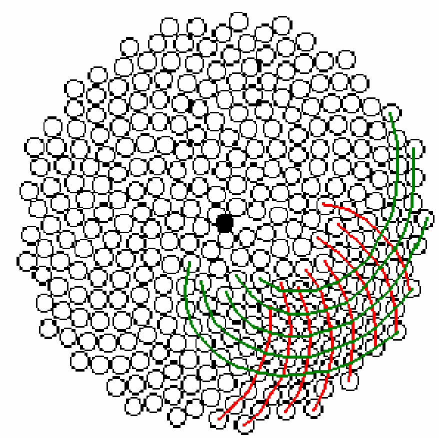
Είναι προφανής η παρουσία του αριθμού Φ.



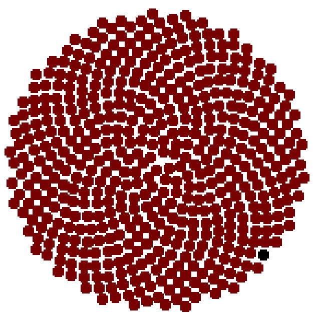
Τα πέταλα των ανθέων

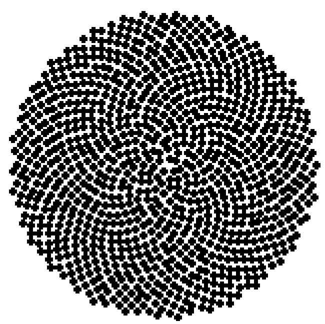
Σε πολλά φυτά ο αριθμός των πετάλων στα άνθη τους είναι ένας από τους αριθμούς Fibonacci π.χ. κρίνα και αγριόκρινα έχουν 3 πέταλα, οι καπουτσίνοι ή ψειρόχορτα έχουν 8 οι καλεντούλες έχουν 5, μερικοί αστέρες έχουν 21 και ορισμένες μαργαρίτες έχουν 34, 55 ή ακόμα και 89 πέταλα.

Οι σπόροι των ανθέων



Οι αριθμοί Fibonacci μπορούν να παρατηρηθούν ακόμα στη διάταξη των σπόρων στις κεφαλές των ανθέων. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η κεφαλή του άνθους μιας μαργαρίτας. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι οι σπόροι σχηματίζουν οπτικά δεξιόστροφες και αριστερόστροφες σπείρες. Αν μετρήσετε στην περιφέρεια το πλήθος των αριστερόστροφων και το πλήθος των δεξιόστροφων σπειρών θα δείτε ότι δεν είναι ίσοι αλλά είναι δυο διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci π.χ. 34 και 21.

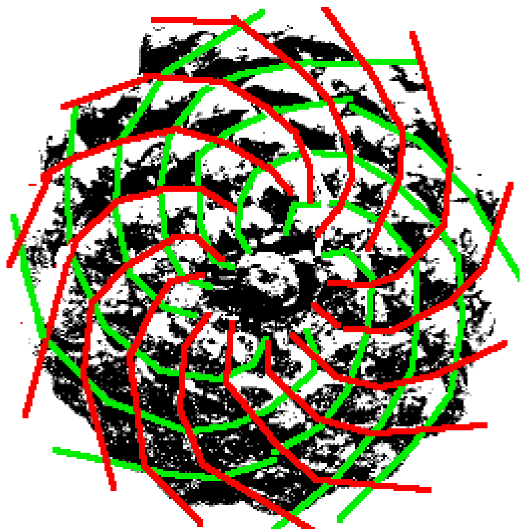




Οι κώνοι των κουκουναριών.

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, συμβαίνει και στα κουκουνάρια. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι οι κώνοι σχηματίζουν (οπτικά) σπείρες δεξιόστροφες και αριστερόστροφες.

Στο σχήμα που παρατίθεται οι αριστερόστροφες έχουν σημειωθεί με κόκκινες σπείρες και είναι 13 ενώ οι δεξιόστροφες έχουν σημειωθεί με πράσινες σπείρες και είναι 8. Είναι δηλαδή διαδοχικοί όροι της ακολουθίας Fibonacci.



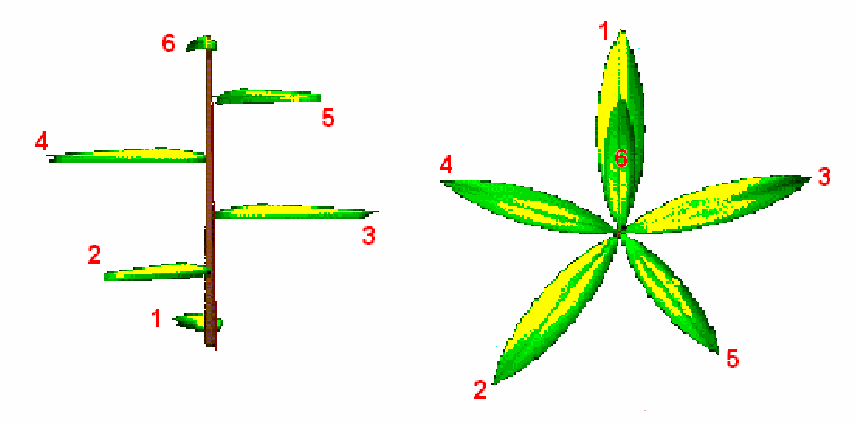
Δοκιμάστε να κόψετε ένα κουκουνάρι και να μετρήσετε τις σπείρες. Όσο πιο μεγάλη είναι η διάμετρός του τόσο πιο εύκολα θα ξεχωρίσετε τις σπείρες.

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα ο λόγος των αριθμών των σπειρών είναι μια ρητή προσέγγιση (δηλαδή μια προσέγγιση με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων) του αριθμού Φ.

ΤΑ ΦΥΛΛΑ ΣΤΑ ΚΛΑΔΙΑ.

Ο τρόπος με τον οποίο τα φύλλα φυτρώνουν πάνω στα κλαδιά δεν είναι τυχαίος. Η φύση φροντίζει να είναι τοποθετημένα έτσι ώστε να δέχονται την μέγιστη δυνατή ηλιακή ενέργεια, και να συλλέγουν την μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα βρόχινου νερού, που να κυλάει στο έδαφος κοντά στη ρίζα.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται ένας από τους τρόπους με τον οποίο η φύση πετυχαίνει τους πιο πάνω στόχους της, με μια διάταξη **5** φύλλων.

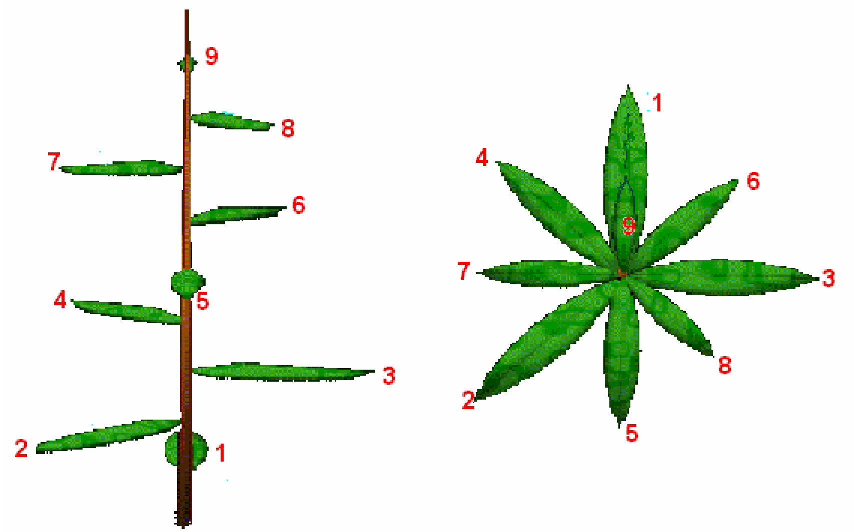


Παρατηρήστε ότι το 2^{o} φύλλο φυτρώνει σε τέτοια θέση ώστε να σχηματίζει **αριστερόστροφη** γωνία περίπου 144^0 με το 1^{o} φύλλο. Το 3^{o} φύλλο σχηματίζει γωνία 144^0 με το 2^{o}, άρα 288^0 με το 1^{o}. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται και έτσι το 6^{o} φύλλο σχηματίζει με το 1^{o} γωνία $5\times144^0=720^0$ που είναι **2** πλήρεις κύκλοι. Έτσι βρίσκεται ακριβώς πάνω από το πρώτο φύλλο, αλλά αρκετά ψηλότερα.

Παρατηρήστε τώρα τις εικόνες αυτές και ξεκινήστε από το πρώτο φύλλο προς το 2^{o}, το 3^{o}, κ.λ.π. μέχρι το 6^{o} αλλά αυτή τη φορά κινηθείτε **δεξιόστροφα** (όπως οι δείκτες του ρολογιού). Θα δείτε ότι χρειάζεται να διαγράψετε **3** πλήρεις κύκλους.

Έτσι έχουμε **2** αριστερόστροφους κύκλους, **3** δεξιόστροφους κύκλους και **5** φύλλα. Δηλαδή 2,3,5 που είναι διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci.

Εάν προσπαθήσετε να κάνετε την ίδια δουλειά με 8 φύλλα (είναι ο επόμενος αριθμός της ακολουθίας Fibonacci) θα έχετε $360^0:8=45^0$, $45^0\times3=135^0$. Δηλαδή κάθε φύλλο φυτρώνει σε σχέση με το προηγούμενό του κατά 135^0 αριστερόστροφα. Με τον τρόπο αυτό το 9^{o} φύλλο βρίσκεται πάνω από το 1^{o} και τα 8 φύλλα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα.



Αν λοιπόν, κινηθείτε **αριστερόστροφα** από το 1^{o}, στο 2^{o} κ.λ.π. μέχρι το 9^{o} θα διαγράψετε **3** κύκλους. Αν κινηθείτε **δεξιόστροφα** θα διαγράψετε **5** κύκλους. Τα φύλλα είναι **8**. Παρατηρήστε ότι 3,5,8 είναι πάλι διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci.

Αν τη διάταξη του πρώτου σχήματος την ονομάσουμε διάταξη **5/3/2** ενώ του δεύτερου σχήματος **8/5/3** προσπαθήστε να σχεδιάσετε τη διάταξη **3/2/1** ή τη διάταξη **2/1/1**.

Διάταξη **2/1/1** ακολουθούν τα φύλλα της φτελιάς, της φλαμουριάς, του γρασιδιού, της αγριάδας.

Η διάταξη **3/2/1** εμφανίζεται στην οξιά, την φουντουκιά, τη βατομουριά (βάτο).

Η διάταξη **5/3/2** παρατηρείται στη βαλανιδιά, την κερασιά, τη μηλιά, δαμασκηνιά, το πουρνάρι.

Την διάταξη **8/5/3** μπορείτε να δείτε στη λεύκα, την τριανταφυλλιά, την αχλαδιά, την ιτιά.

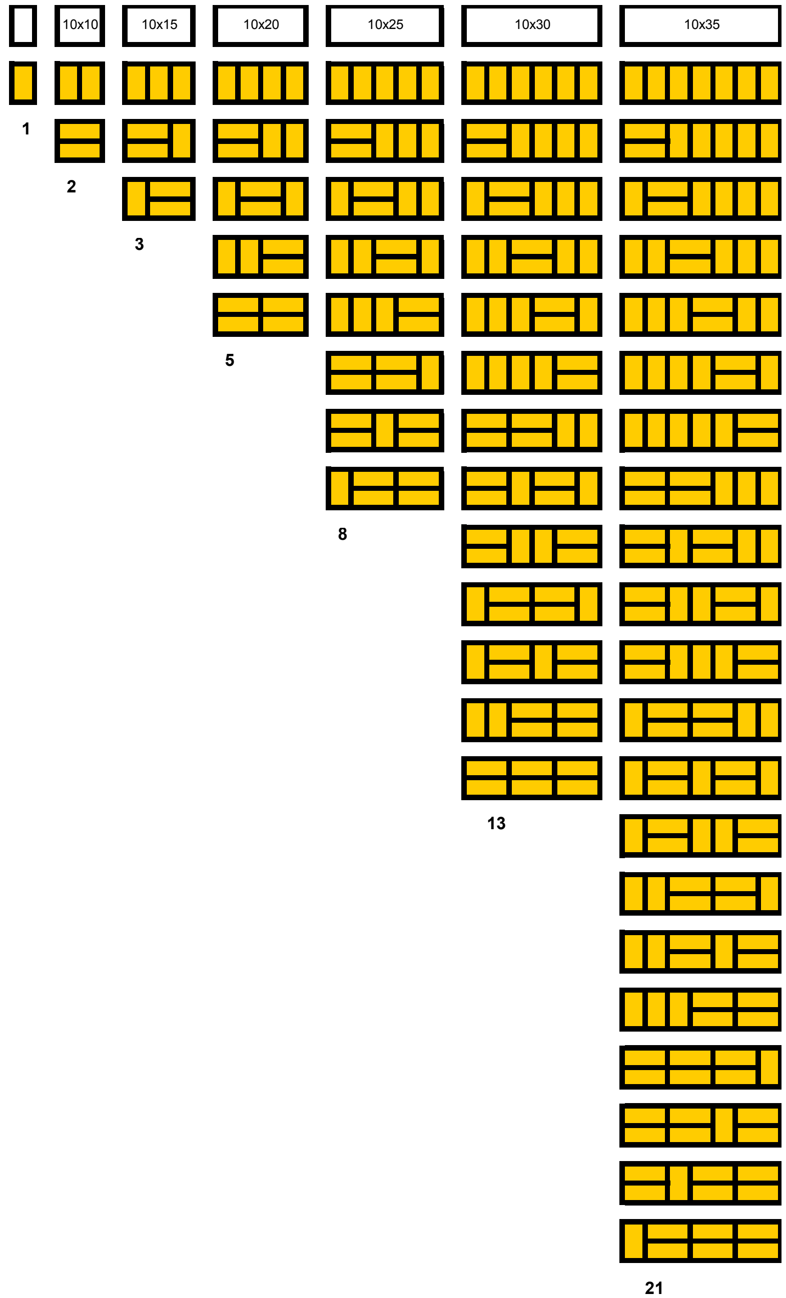
Η **13/8/5** εμφανίζεται στην αμυγδαλιά.

Στο σημείο αυτό αισθάνομαι την ανάγκη να επαναλάβω ότι η εμφάνιση αριθμών Fibonacci και του χρυσού λόγου Φ στη φύση **δεν είναι φυσικός νόμος** αλλά μια αξιοθαύμαστη **τάση** που επικρατεί.

Ταξινόμηση πλακιδίων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πλακάκια με διαστάσεις π.χ. 5cm×10cm και μια σειρά από επιφάνειες με πλάτος 10cm και μήκη 5, 10, 15, 20, 25, 30, κ.λ.π. πολλαπλάσια του 5. Άραγε με πόσους τρόπους μπορεί να στρωθεί η κάθε μια από τις επιφάνειες αυτές;

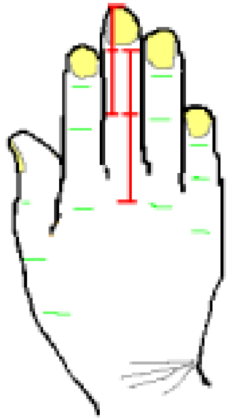
Στην επόμενη σελίδα φαίνεται μια απάντηση στο ερώτημα και είναι προφανής η παρουσία της ακολουθίας Fibonacci. Αν θέλετε μπορείτε να συνεχίσετε για τις επιφάνειες 10×40, 10×45, κ.λ.π.



Δάκτυλα και φάλαγγες.

Αλήθεια κοιτάξτε τα χέρια σας… παρατηρήστε ότι έχετε…

- **2** χέρια, καθένα από τα τα οποία έχει…
- **5** δάκτυλα, καθένα από τα οποία έχει…
- **3** φάλαγγες, που χωρίζονται από…
- **2** αρθρώσεις.



Είναι όλοι αριθμοί Fibonacci. Να είναι άραγε σύμπτωση ή όχι; Πάντως αν μετρήσετε τα μήκη των φαλαγγών θα δείτε ότι ο λόγος της μεσαίας φάλαγγας προς την μικρή (την ακραία) είναι περίπου ίσος με το λόγο της μεγάλης φάλαγγας προς την μεσαία που είναι περίπου ίσος με τον αριθμό του Φειδία Φ.